Calcul d'une intégrale

Partie I

1. On considère $f:]-\infty,0[\cup]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ l'application définie par $f(x)=\dfrac{x}{\mathrm{e}^x-1}$.

1.a Former le développement limité à l'ordre 2 de f en 0.
En déduire que f est prolongeable par continuité en 0. On notera encore f la fonction ainsi obtenue.

1.b Justifier que f admet une tangente en 0.
Quelle est la position relative de la courbe et de sa tangente au voisinage de 0 ?

2. On considère $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ l'application définie par $\varphi(x)=(1-x)\mathrm{e}^x-1$.

2.a Dresser le tableau de signe de $\varphi(x)$ pour $x\in\mathbb{R}$.

2.b Former le tableau de variation de f.

2.c Préciser les branches infinies de f.

2.d Donner l'allure du graphe de f.

3. On considère l'équation différentielle $E:(\mathrm{e}^x-1)y'+\mathrm{e}^x y=1$.

3.a Résoudre cette équation différentielle sur $]0,+\infty[$ et $]-\infty,0[$.

3.b Résoudre cette équation différentielle sur $\mathbb{R}$.

Partie II

1. Montrer que $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^x-1}\mathrm{d}x$ est bien définie.
On ne cherchera pas à calculer cette intégrale pour l'instant.

2. Pour $\alpha>0$, on pose $I(\alpha)=\displaystyle\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x$ et $J(\alpha)=\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x$.

2.a Montrer que les intégrables $I(\alpha)$ et $J(\alpha)$ sont bien définies.

2.b Calculer $I(\alpha)$ et observer que $0\le J(\alpha)\le\dfrac{1}{\alpha}$.

2.c Etablir que pour tout $x>0$ et $n\in\mathbb{N}^*$: $\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{-kx}+\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{\mathrm{e}^x-1}$.

2.d En déduire que $I=\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$.

Partie III

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on considère le polynôme $P_n=\dfrac{1}{2i}\left[(X+i)^{2n+1}-(X-i)^{2n+1}\right]$.

1.a Montrer que le polynôme P_n est a coefficients réels et préciser son degré.

1.b Déterminer les racines de P_n.
On exprimera celles-ci en exploitant la fonction cotangente notée cot.

1.c Montrer qu'il existe un polynôme réel Q_n tel que $P_n(X)=Q_n(X^2)$.
Exprimer les coefficients de Q_n.

1.d Déterminer les racines de Q_n.

2. On pose $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cot^2\frac{k\pi}{2n+1}$ et $T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\dfrac{k\pi}{2n+1}}$.

2.a Calculer S_n puis T_n.

2.b Prouver l'encadrement : $\cot^2 x \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{\sin^2 x}$ pour tout $x \in]0, \pi/2[$.

2.c En déduire la valeur de $\lim_{p \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.